# 上昇定理と下降定理

Yusuke Takabatake

January 2018

## はしがき

本稿は, 松村 [3] に基づき, 整拡大および Cohen-Seidenberg の定理（上昇定理と下降定理）の概略を詳説することを目的としたものである.

整拡大の概念は, 代数的整数論の基礎である Dedekind 環や整数環の導入に必須である. また, 整閉性は, 代数曲線の非特異性と深く関わっている. また, 環の間に上昇定理・下降定理が成立することは, そのスペクトラムの間の標準的写像が閉写像・開写像であることと密接に関係しており, 代数的な性質と位相的な性質との橋渡しとなっている. これらの重要性を示すべく, 本稿を執筆した次第である.

本稿では, 環は可換環とする. 特に断りのない主張は, 松村 [3] に則る. 紙面の制約上, 一部の主張の証明は他書に譲った.

## 1　整拡大

**定義 1.1**　（整拡大）:

$A \subseteq B$ を環の拡大とする.

(i) $b \in B$ が $A$ 上 **整** であるとは, ある $a_1, \cdots, a_n \in A$ が存在して, **整従属関係式** $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ を満たすこと, 即ち, $b$ が $A$ 係数のモニック多項式の根となることをいう.

(ii) $b \in B$ が $A$ 上 **代数的** であるとは, $A, B$ が体で, $b$ が $A$ 上整であることをいう.

(iii) $\widetilde{A} := \{b \in B \mid b$ は $A$ 上整 $\}$ を, $A$ の $B$ での **整閉包** という.

(iv) $B$ が $A$ 上 **整** である（または, $A \subseteq B$ が **整拡大** である）とは, $B = \widetilde{A}$ のときをいう.

(v) $f : B \longrightarrow C$ を環準同型写像とすると, $C$ は $B$ 代数. $f(B) \subseteq C$ が整拡大のとき, $f$ は **整** であるといい, $C$ は **整 $B$ 代数** であるという.

(vi) $A$ が $B$ の中で **整閉** であるとは, $A = \widetilde{A}$ のときをいう.

(vii) 整域 $A$ が **整閉整域** であるとは, $A$ がその商体 $K$ の中で整閉であることをいう.

(viii) $A$ が **正規環** であるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ による局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ が整閉整域であることをいう. 但し, 正規環の語を整閉整域の意に用いる流儀もある. （実際, 正規整域と整閉整域は同義. また, ネータ正規環は有限個の整閉整域の直積と同型（松村 [3, p.78]）.）

(ix) **代数体** $K$ での $\mathbb{Z}$ の整閉包 $O_K$ を $K$ の **整数環** という. 即ち, $O_K = \{y \in K \mid y$ は $\mathbb{Z}$ 上整 $\}$.

**命題 1.2**　（整と有限）:

$A \subseteq B$ を環の拡大として, 以下は同値である.

(i) $b \in B$ は $A$ 上整である.

(ii) $A[b]$ は有限 $A$ 加群である.

(iii) $b$ を含み, 有限 $A$ 加群であるような $B$ の部分環 $C$ が存在する.

(iv) 忠実な $A[b]$ 加群 $M$ で $A$ 加群として有限なものが存在する.

**[証明].** (i) $\Longrightarrow$ (ii). $b \in B$ を $A$ 上整とすると, $a_1, \cdots, a_n \in A$ が存在して, $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. いま, 有限 $A$ 加群 $M = A + Ab + \cdots + Ab^{n-1}$ をとると, $1, b, \cdots, b^{n-1} \in M$. 故に, $b^n = (-a_1) \cdot b^{n-1} + \cdots + (-a_n) \cdot 1 \in M$. 両辺に $b$ を掛けて, $b^{n+1} = (-a_1) b^n + \cdots + (-a_n) b \in M$. これを繰り返すと, 任意の $m$ について $b^m \in M$. 故に, $A[b] = M$ であり有限.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $C = A[b]$ とすればいい.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). $M = C$ とすれば, $A[b] \subseteq C$ より, $M$ は $A[b]$ 加群. また, $h$ が任意の $m \in M (= C)$ について $hm = 0$ であるとすると, $m = 1$ として $h = 0$ なので, $A[b] \longrightarrow \operatorname{End} M$ は単射となり, 忠実である.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). $M$ は有限 $A$ 加群. また, $\varphi : M \longrightarrow M$ を $b$ による乗法で定まる $A$ 加群準同型とすると, $\varphi \in \operatorname{End} M$. また, $M$ は $A[b]$ 加群なので, $\varphi(M) = bM \subseteq M = AM$. 故に, 行列式のトリック（Reid [15] 2.7 節）より, $a_1, \cdots, a_n \in A$ が存在して, $\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. いま, $M$ は忠実なので, $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. 故に, $b$ は $A$ 上整. ■

**系 1.3** （整閉包は演算で閉じている）:

$b_1, \cdots, b_n \in B$ が $A$ 上整であれば, $A[b_1, \cdots, b_n]$ は有限 $A$ 加群である. 故に, $\widetilde{A}$ は $B$ の部分環である.

**[証明].** 前半の主張. 帰納法で示す（$n = 1$ のときは 命題 1.2）. いま, $b_n$ は $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$ 上整だから, $(A[b_1, \cdots, b_{n-1}])[b_n] = A[b_1, \cdots, b_n]$ は $A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$ 上有限であり, 帰納法の仮定（$A[b_1, \cdots, b_{n-1}]$ が有限 $A$ 加群）から, $(A[b_1, \cdots, b_{n-1}])[b_n]$ は $A$ 上でも有限.

後半の主張. $b, b' \in \widetilde{A}$ とすると, 前半の主張より, $A[b, b']$ は有限 $A$ 加群. 故に, 命題 1.2 より $b \pm b', bb' \in A[b, b']$ は $A$ 上整. 故に, $b \pm b', bb' \in \widetilde{A}$. また, $1 \in \widetilde{A}$ は自明. ■

**命題 1.4** （整従属の推移律）:

$A \subseteq B \subseteq C$ を環の拡大としたとき, $B$ が $A$ 上整で, $C$ が $B$ 上整であれば, $C$ は $A$ 上整である. 故に, $A \subseteq B$ を環の拡大として, $C$ を $B$ での $A$ の整閉包とすると, $C$ は $B$ において整閉である. 特に, $\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$ である.

**[証明].** 前半の主張. 任意の $c \in C$ が $B$ 上整なので, $b_1, \cdots, b_n \in B$ が存在して, $c^n + b_1 c^{n-1} + \cdots + b_n = 0$. ところが, $B$ は $A$ 上整だから, $b_1, \cdots, b_n$ は $A$ 上整. 故に, $L := A[b_1, \cdots, b_n]$ は有限 $A$ 加群. そこで, $T := L[c]$ とおくと, $c \in T$. いま, $c$ は $L$ 上整だから $T$ は $L$ 上有限加群. 故に, $T$ は有限 $A$ 加群. 故に, 命題 1.2 より, $c$ は $A$ 上整.

後半の主張. $x \in B$ を $C$ 上整とすると, 前半の主張より, $x$ は $A$ 上整. 故に, $x \in C$. ■

**命題 1.5 :**

GCD 整域は整閉整域である. 故に, UFD や PID もそうである.

**[証明].** $A$ を GCD 整域, $K := \operatorname{Frac} A$ として, $a/b \in K$ $(a, b \in A, b \neq 0)$ が $A$ 上整としたとき, $a/b \in A$ を示す. さて, $a/b$ は予め既約分数としてよい. いま, $a/b$ は $A$ 上整なので, $a_1, \cdots, a_n \in A$ が存在して, $(a/b)^n + a_1(a/b)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. 即ち, $a^n + a_1 b a^{n-1} + \cdots + a_n b^n = 0$. 即ち, $a^n = -b \cdot (a_1 a^{n-1} + \cdots + a_n b^{n-1})$. 故に, $b \mid a^n$. もし, $b \in A^\times$ でなければ, $\mathrm{GCD}(a, b) \notin A^\times$ となり, $a/b$ が既約分数であることに矛盾. 故に, $b \in A^\times$. 故に, $a/b \in A$. 故に, $A$ は整閉整域. 「PID $\Longrightarrow$ UFD $\Longrightarrow$ GCD 整域」より, UFD や PID もそうである. ■

命題 **1.6** （整従属・整閉の安定性）:

以下が成り立つ.

(i) $A \subseteq B$ を環の整拡大, $I$ を $B$ のイデアルとしたとき, $A/(I \cap A) \subseteq B/I$ は整拡大である.

(ii) $A \subseteq B$ を環の拡大, $S \subseteq A$ を積閉集合としたとき, $\widetilde{A_S} = \widetilde{A}_S$ である. 故に, $A$ が整閉整域ならば, $A_S$ もそうである.

(iii) $A_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ を商体を共有する整閉整域としたとき, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も整閉整域である.

(iv) $A_1, \cdots, A_n$ を整 $A$ 代数としたとき, $\prod_{i=1}^n A_i$ もそうである.

**[証明].** (i) $\beta \in B/I$ を任意にとり, $\beta = \overline{b}$ $(b \in B)$ とする. いま, $B$ は $A$ 上整なので, $a_1, \cdots, a_n \in A$ が存在して, $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. すると, $A/(I \cap A)$ において, $0 = \overline{b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n} = \overline{b}^n + \overline{a_1}\overline{b}^{n-1} + \cdots + \overline{a_n} = \beta^n + \overline{a_1}\beta^{n-1} + \cdots + \overline{a_n}$. いま, $\overline{a_i} \in A/(I \cap A)$ なので, $\beta$ は $A/(I \cap A)$ 上整. ■

(ii) $\widetilde{A_S} \subseteq \widetilde{A}_S$ を示す. $\alpha \in B_S$ が $A_S$ 上整だとすると, $c_i/s_i \in A_S$ $(c_i \in A, s_i \in S)$ が存在して, $\alpha^n + (c_1/s_1)\alpha^{n-1} + \cdots + (c_n/s_n) = 0$. いま, $s := s_1 \cdots s_n \in S$ とする. いま, $\alpha \in B_S$ より, $\alpha = \beta/s$ $(\beta \in B)$ と書ける. すると, $t \in S$ が存在して, $t(\beta^n + s(c_1/s_1)\beta^{n-1} + \cdots + s^n(c_n/s_n)) = 0$. 故に, $(t\beta)^n + ts(c_1/s_1)(t\beta)^{n-1} + \cdots + (ts)^n(c_n/s_n)) = 0$. 故に, $t\beta$ は $A$ 上整. 故に, $t\beta \in \widetilde{A}$. 故に, $\alpha = t\beta/ts \in \widetilde{A}_S$.

$\widetilde{A_S} \supseteq \widetilde{A}_S$ を示す. $\alpha \in \widetilde{A}_S$ を任意にとると, $x \in \widetilde{A}, s \in S$ が存在して, $\alpha = x/s$. いま, $x = s\alpha \in \widetilde{A}$ なので, $r_1, \cdots, r_n \in A$ が存在して, $(s\alpha)^n + r_1(s\alpha)^{n-1} + \cdots + r_n = 0$. 故に, $\alpha^n + (r_1/s^1)\alpha^{n-1} + \cdots + (r_n/s^n) = 0$. いま, $r_i/s^i \in A_S$ なので, $\alpha$ は $A_S$ 上整. 故に, $\alpha \in \widetilde{A_S}$. ■

(iii) , (iv) 後藤・渡辺 [2, p.84] 問題 3.2, Atiyah and MacDonald [10, p.103] 演習問題 6. ■

## 2 Lying over theorem

補題 **2.1** （整と体の拡大）:

$A \subseteq B$ を整域の整拡大として, 「$A$ が体 $\Longleftrightarrow$ $B$ が体」が成り立つ.

**[証明].** $\Longrightarrow$. $A$ を体とし, $b \in B \backslash \{0\}$ を任意にとる. いま, $B$ は $A$ 上整なので, $a_1, \cdots, a_n \in A$ が存在して, $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. ここで, $B$ は整域なので, $a_n \neq 0$ としてよい（そうでないときは $b$ で割ればよい）. このとき, $a_n = -b \cdot (b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$ で, $a_n \in B^\times$ だから, $1 = a_n \cdot {a_n}^{-1} = b \cdot (-(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1}){a_n}^{-1})$. 故に, $b \in B^\times$ であり, $B$ は体.

$\Longleftarrow$. $B$ を体とし, $a \in A \backslash \{0\}$ を任意にとる. すると, $a \neq 0$ (in $B$) だから, $a^{-1} \in B$ が存在. いま, $a^{-1}$ は $A$ 上整なので, $c_1, \cdots, c_n \in A$ が存在して, $(a^{-1})^n + c_1(a^{-1})^{n-1} + \cdots + c_n = 0$. 故に, $a^{-n} = -(c_1 a^{-n+1} + c_2 a^{-n+2} + \cdots + c_n)$. 両辺を $a^n$ 倍すれば, $1 = a \cdot (-(c_1 + c_2 a + \cdots + c_n a^{n-1}))$. 故に,

$a \in A^\times$ であり, $A$ は体. ■

**補題 2.2：**

$A \subseteq B$ を環の整拡大として, 以下が成り立つ.

(i) $P \in \text{m-Spec}\, B$ ならば, $P \cap A \in \text{m-Spec}\, A$ である.

(ii) $\mathfrak{p} \in \text{m-Spec}\, A$ ならば, $\mathfrak{p}B \neq B$ であり, $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $\mathfrak{p} = P \cap A$ を満たす. このとき, $P \in \text{m-Spec}\, B$ である.

**[証明].** (i) $P \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p} = P \cap A$ とすると, 命題 1.6 より, $A/\mathfrak{p} \subseteq B/P$ は整拡大. 故に, 補題 2.1 より, 「$A/\mathfrak{p}$ が体 $\Longleftrightarrow$ $B/P$ が体」. 故に, 「$\mathfrak{p} \in \text{m-Spec}\, A \Longleftrightarrow P \in \text{m-Spec}\, B$」. ■

(ii) 【Step1】 $\mathfrak{p}B \neq B$ を示す. もし, $\mathfrak{p}B = B$ とすると, $1 \in \mathfrak{p}B$ なので, $\pi_1, \cdots, \pi_n \in \mathfrak{p}$, $b_1, \cdots, b_n \in B$ が存在して, $\pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 + \cdots + \pi_n b_n = 1$. そこで, $C := A[b_1, \cdots, b_n]$ とすると, $C$ は有限 $A$ 加群. また, $C$ は $B$ の部分環であり, $\mathfrak{p}C = C$. 故に, NAK（森田 [4] III. 命題 6.6）より, $\Delta \in A$ が存在して, $\Delta C = 0$ かつ $\Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$. いま, $1 \in C$ より, $\Delta C = 0$ から, $\Delta = 0$. また, $\Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$ は, $1 - \Delta \in \mathfrak{p}$ の意味なので, $\Delta = 0$ として, $1 \in \mathfrak{p}$. よって, $\mathfrak{p} \in \text{m-Spec}\, A$ に矛盾. 故に, $\mathfrak{p}B \neq B$.

【Step2】 $P \in \operatorname{Spec} B$ の存在を示す. いま, $\mathfrak{p}B \neq B$ だから, $\mathfrak{p}B$ はある $P \in \text{m-Spec}\, B$ に含まれる. このとき, $\mathfrak{p} \subseteq P \cap A$ となるが, $\mathfrak{p} \in \text{m-Spec}\, A$ だから, $\mathfrak{p} = P \cap A$. ■

**補題 2.3：**

$A \subseteq B$ を環の整拡大, $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} B$ としたとき, $P_1 \subseteq P_2$ かつ $P_1 \cap A = P_2 \cap A$ ならば, $P_1 = P_2$ が成り立つ.

**[証明].** $\mathfrak{p} := P_1 \cap A = P_2 \cap A$ とおくと, 命題 1.6 より, $A_\mathfrak{p} \subseteq B_\mathfrak{p}$ は整拡大. いま, $P_1 B_\mathfrak{p} \subseteq P_2 B_\mathfrak{p}$. また, $P_1 B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} = P_2 B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. いま, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \in \text{m-Spec}\, A_\mathfrak{p}$ なので, 補題 2.2 より, $P_1 B_\mathfrak{p}, P_2 B_\mathfrak{p} \in \text{m-Spec}\, B_\mathfrak{p}$. 以上より, $P_1 B_\mathfrak{p} = P_2 B_\mathfrak{p}$. 故に, $P_1 = P_2$. ■

**定理 2.4：**

$A \subseteq B$ を環の整拡大, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ として, 以下が成り立つ.

(i) **（Lying over theorem）** $\mathfrak{p}$ の上にある $B$ の素イデアルは存在する.

(ii) **（Incomparability theorem）** $\mathfrak{p}$ の上にある $B$ の素イデアルたちの間には包含関係はない.

(iii) $A$ を整閉整域, $L$ を $K := \operatorname{Frac} A$ の正規拡大, $B$ を $A$ の $L$ での整閉包, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ としたとき, $\mathfrak{p}$ の上にある $B$ の素イデアルたちは, 互いに $K$ 上で共軛である.

**[証明].** (i), (ii) 命題 1.6 より, $A_\mathfrak{p} \subseteq B_\mathfrak{p}$ は整拡大. いま, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d] & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & A_\mathfrak{p} \arrow[r] & B_\mathfrak{p} & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

から分かる通り, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap A_\mathfrak{p}$ である $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$ と, $\mathfrak{p} = P \cap A$ である $P \in \operatorname{Spec} B$ とは, 1 対 1 に対

応. 故に, $\mathfrak{p}$ が極大イデアルのときを示せばよいが, これは補題 2.2, 2.3 で証明済み. ■

(iii) $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} B$, $P_1 \cap A = P_2 \cap A = \mathfrak{p}$ とする.

$\boxed{L/K \text{ が有限次拡大の場合}}$ $G := \operatorname{Aut}_K L = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ とする. また, $Q_j := \sigma_j(P_1)$ $(j = 1, \cdots, r)$ とおく. さて, $P_2 = Q_j = \sigma_j(P_1)$ である $j$ が存在すれば, $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} B$ の共軛性を示せたことになる. そこで, 任意の $j$ に対して $Q_j \neq P_2$ と仮定して矛盾を導く. いま, (ii) より, $P_2 \not\subset Q_j$. 故に, $x \in P_2 \backslash Q_j$ が存在. いま, $y := \prod_j \sigma_j(x)$ とすると $\sigma_j(y) = y$.

<u>$\operatorname{char} K = 0$ のとき.</u> $L/K$ は有限次 Galois 拡大なので, $y \in K$. そして, $y$ は $A$ 上整だから, $y \in A$. ここで, $x \notin Q_j = \sigma_j(P_1)$ なので, ${\sigma_j}^{-1}(x) \notin {\sigma_j}^{-1}(Q_j) = P_1$. 故に, $\prod_j {\sigma_j}^{-1}(x) \notin P_1$. いま, 集合として $\{{\sigma_1}^{-1}, \cdots, {\sigma_r}^{-1}\} = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ なので, $y = \prod_j \sigma_j(x) = \prod_j {\sigma_j}^{-1}(x) \notin P_1$. 故に, $y \notin P_1 \cap K = (P_1 \cap B) \cap K = P_1 \cap (B \cap K) = P_1 \cap A = \mathfrak{p}$. 一方, $x \in P_2$ であり, $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ の中には恒等写像があるので, $y \in P_2$. これと $y \in A$ より, $y \in P_2 \cap A = \mathfrak{p}$ となり矛盾.

<u>$\operatorname{char} K = p > 0$ のとき.</u> $K' := \{\alpha \in L \mid \text{任意の } j \text{ について} \sigma_j(\alpha) = \alpha\}$ とおくと, $\operatorname{Hom}_K^{alg}(K', \overline{K})$ の元は恒等写像だけである. 故に, $|\operatorname{Hom}_K^{alg}(K', \overline{K})| = 1$. 故に, $K'/K$ の分離次数 $[K' : K]_S = |\operatorname{Hom}_K^{alg}(K', \overline{K})|$（雪江 [8] 定理 3.3.30(2)）が 1 となるので, $K'/K$ は純非分離拡大（即ち, 任意の $\alpha \in K'$ に対して $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $\alpha^{p^n} \in K$）. いま, $\sigma_j(y) = y$ より $y \in K'$ なので, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $y^{p^N} \in K$. 故に, $\operatorname{char} K = 0$ のときの議論より, $y \in P_2 \backslash P_1$ だが, $P_1$ は素イデアルなので, $y^{p^N} \in P_2 \backslash P_1$. そこで, $\operatorname{char} K = 0$ のときと同様にして, $y^{p^N} \notin P_1 \cap A = \mathfrak{p}$, $y^{p^N} \in P_2 \cap A = \mathfrak{p}$ となり矛盾.

$\boxed{L/K \text{ が無限次拡大の場合}}$ $M$ を拡大 $L/K$ の中間体, $B_M := B \cap M$ とすると, $B_M$ は $A$ の $M$ での整閉包. いま, $L/K$ の中間体 $M$ で $M/K$ が正規拡大となるものと, $M$ から $M$ への $K$ 同型 $\sigma_M \in \operatorname{Aut}_K M$ との組 $(M, \sigma_M)$ のうち, $\sigma_M(P_1 \cap B_M) = P_2 \cap B_M$ となるものの集合を $\mathfrak{X}$ とおく. いま, $(M_1, \sigma_{M_1}), (M_2, \sigma_{M_2}) \in \mathfrak{X}$ に対して, 二項関係 $\prec$ を「$(M_1, \sigma_{M_1}) \prec (M_2, \sigma_{M_2}) \Longleftrightarrow M_1 \subseteq M_2, \sigma_{M_1} \text{は} \sigma_{M_2} \text{の制限}$」と定義すると, 順序になる.

<u>【Step1】</u> $S$ を $\mathfrak{X}$ の任意の全順序部分集合とする. いま, $M_0 := \bigcup_{(M, \sigma_M) \in S} M$ とし, $x \in M$ に対し, $\sigma_0(x) := \sigma_M(x)$ とすれば, $\sigma_0 \in \operatorname{Aut}_K M_0$. また, $M_0/K$ は正規拡大. また, $\sigma_0(P_1 \cap B_{M_0}) = \sigma_0(P_1 \cap (\bigcup_M B_M)) = \sigma_0(\bigcup_M (P_1 \cap B_M)) = \bigcup_M (\sigma_0(P_1 \cap B_M)) = \bigcup_M (P_2 \cap B_M) = P_2 \cap (\bigcup_M B_M) = P_2 \cap B_{M_0}$. 以上より, $(M_0, \sigma_{M_0}) \in \mathfrak{X}$. また, $M_0$ の取り方より, 任意の $(M, \sigma_M) \in S$ に対して, $(M, \sigma_M) \prec (M_0, \sigma_{M_0})$ なので, $(M_0, \sigma_{M_0})$ は $S$ の上界. 故に, $\mathfrak{X}$ は帰納的順序集合なので, Zorn の補題より, $\mathfrak{X}$ は極大元 $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma_M}) \in \mathfrak{X}$ をもつ.

<u>【Step2】</u> $\widetilde{M} = L$ ならば, 題意は示せたことになる. そこで, $\widetilde{M} \neq L$ と仮定して矛盾を導く. いま, $\widetilde{M} \subseteq L$ なので $\widetilde{M} \neq L$ とすれば, $x \in L \backslash \widetilde{M}$ が存在. いま, $x$ の $K$ 上共軛を $x_1, \cdots, x_m \in L$ とする（$L/K$ は正規拡大だから, $L$ の元の $K$ 上共軛元は $L$ の元）. さて, $F := \widetilde{M}(x_1, \cdots, x_m)$ としたとき, $F \subseteq L$ で, $F/K$ は正規拡大で, $F/\widetilde{M}$ は有限次拡大. いま, Steinitz の定理（森田 [4] V. 命題 2.8）より, $\widetilde{\sigma_M}$ は $\operatorname{Hom}_K^{alg}(F, \overline{K})$ の元に拡張できる. そして, $F/K$ は正規拡大なので, $\widetilde{\sigma_M} \in \operatorname{Aut}_K F$. いま, $B_F := B \cap F$ として, $Q_1 := \widetilde{\sigma_M}(P_1 \cap B_F), Q_2 := P_2 \cap B_F$ とする（$\widetilde{M}$ 上では $Q_1 = Q_2$ だが, $F$ 上ではそれはいえない）. このとき, $Q_1 \cap B_{\widetilde{M}} = \widetilde{\sigma_M}(P_1 \cap B_F) \cap B_{\widetilde{M}} = \widetilde{\sigma_M}(P_1 \cap B_{\widetilde{M}}) = P_2 \cap B_{\widetilde{M}} = P_2 \cap (B_{\widetilde{M}} \cap B_F) = (P_2 \cap B_F) \cap B_{\widetilde{M}} = Q_2 \cap B_{\widetilde{M}}$. ところで, $F/\widetilde{M}$ は有限次拡大なので, 有限次拡大の場合より, $Q_1, Q_2$ は $\widetilde{M}$ 上共軛. 即ち, $\tau \in \operatorname{Aut}_{\widetilde{M}} F$ が存在して, $\tau(Q_1) = Q_2$. いま, $\tau, \widetilde{\sigma_M} \in \operatorname{Aut}_K F$ なので, $\tau\widetilde{\sigma_M} \in \operatorname{Aut}_K F$. また, $(\tau\widetilde{\sigma_M})(P_1 \cap B_F) = \tau(Q_1) = Q_2 = P_2 \cap B_F$. また, $\widetilde{M}$ 上では $\tau$ は恒等写像なので, $\widetilde{\sigma_M}$ は $\tau\widetilde{\sigma_M}$ の制限. これと, $\widetilde{M} \subseteq F$ なので, $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma_M}) \prec (F, \tau\widetilde{\sigma_M})$. 一方, $\widetilde{M} \neq F$ より, $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma_M})$ の $\mathfrak{X}$ での極大性に矛盾. ■

## 3　Cohen-Seidenberg の定理

**定義 3.1 :**

$A$ を環とし, $B$ を $A$ 代数, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする.

(i) $A$ と $B$ の間に **上昇定理** が成立するとは, $P \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p} = P \cap A$ ならば, $P' \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $P \subseteq P'$ かつ $\mathfrak{p}' = P' \cap A$ を満たすことをいう.

(ii) $A$ と $B$ の間に **下降定理** が成立するとは, $P' \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p}' = P' \cap A$ ならば, $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $P \subseteq P'$ かつ $\mathfrak{p} = P \cap A$ を満たすことをいう.

**事実 3.2 :**

上昇定理が成立しているとき. $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ を $A$ の素イデアルの昇鎖とし, $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_m$ $(m < n)$ を $B$ の素イデアルの昇鎖として, $\mathfrak{p}_i = P_i \cap A$ $(1 \leq i \leq m)$ であるとする. このとき, $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_m$ を $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_n$ に延長して, $\mathfrak{p}_i = P_i \cap A$ $(1 \leq i \leq n)$ とできる. 下降定理についても, 同様のことがいえる.

**定理 3.3 （上昇定理）:**

$A \subseteq B$ を環の整拡大とすると, 上昇定理が成立する.

**[証明].** $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする. また, $P \in \operatorname{Spec} B$ で $\mathfrak{p} = P \cap A$ とする. 命題 1.6 より, $A/\mathfrak{p} \subseteq B/P$ は整拡大. 定理 2.4 (i) より, $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$ に対して, $Q \in \operatorname{Spec}(B/P)$ が存在して, $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p} = Q \cap (A/\mathfrak{p})$. そして, この $Q \in \operatorname{Spec}(B/P)$ に対して, $P' \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $Q = P'/P$. すると, $P \subseteq P'$ かつ $\mathfrak{p}' = P' \cap A$. ■

**系 3.4 :**

$A \subseteq B$ を環の整拡大とすると, $\dim A = \dim B$ である.

**[証明].** 定理 2.4 (ii), 事実 3.2, 定理 3.3 から従う（後藤・渡辺 [2] 系 3.11）. ■

**定理 3.5 （下降定理）:**

$A \subseteq B$ を整域の整拡大, $A$ を整閉整域とすると, 下降定理が成立する.

**[証明].** $H := \operatorname{Frac} B$ は $K := \operatorname{Frac} A$ の代数拡大. また, $H$ を含む $K$ の正規拡大を $L$ とし, $A$ の $L$ での整閉包を $C$ とすると, $B \subseteq C$. さて, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする. また, $P' \in \operatorname{Spec} B$ で $\mathfrak{p}' = P' \cap A$ とする. 命題 1.4 より, $C$ は $B$ 上整なので, 定理 2.4 (i) より, $Q' \in \operatorname{Spec} C$ が存在して, $P' = Q' \cap B$. また, $C$ は $A$ 上整なので, 定理 2.4 (i) より, $Q \in \operatorname{Spec} C$ が存在して, $\mathfrak{p} = Q \cap A$. 命題 1.4 より, $A \subseteq C$ は整拡大なので, 定理 3.3 より, $A$ と $C$ の間に上昇定理が成立するので, $Q_1 \in \operatorname{Spec} C$ が存在して, $Q \subseteq Q_1$ かつ $\mathfrak{p}' = Q_1 \cap A$. ところで, $\mathfrak{p}' = P' \cap A = (Q' \cap B) \cap A = Q' \cap (B \cap A) = Q' \cap A$. 故に, 定理 2.4 (iii) より, $Q_1$ と $Q'$ は $K$ 上共軛. 即ち, $\sigma \in \operatorname{Aut}_K L$ が存在して, $\sigma(Q_1) = Q'$. ここで, $Q_2 := \sigma(Q), P := Q_2 \cap B$ とする. いま, $Q \subseteq Q_1$ より, $P = Q_2 \cap B = \sigma(Q) \cap B \subseteq \sigma(Q_1) \cap B = Q' \cap B = P'$. また, $x \in Q$ で $\sigma(x) \in A$ なら $x \in A$ なので, $\sigma(x) = x \in Q_2 \cap A$. 故に, $\mathfrak{p} = Q \cap A = Q_2 \cap A = Q_2 \cap (B \cap A) = (Q_2 \cap B) \cap A = P \cap A$. ■

**例 3.6 :**

定理 3.5 で「$A$ は整閉整域」という仮定は必要（後藤・渡辺 [2] 例 3.17）.

実際, $B := k[X,Y]$ （$k$ は体）, $A := \{f \in B \mid f(0,0) = f(1,0)\}$, $\mathfrak{p} := (X) \cap A \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{p}' := (X-1,Y) \cap A \in \operatorname{Spec} A$, $P' := (X-1,Y) \in \operatorname{Spec} B$ とすると, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ かつ $\mathfrak{p}' = P' \cap A$. しかし, $\mathfrak{p} = P \cap A$ である $P \in \operatorname{Spec} B$ は $P = (X)$ であるが, $P = (X) \nsubseteq (X-1,Y) = P'$ となり, 下降定理は不成立.

定理 **3.7** （平坦性と下降定理）:

$A$ を環, $B$ を平坦 $A$ 代数とすると, $A$ と $B$ の間に下降定理が成立する.

**[証明].** $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする. また, $P' \in \operatorname{Spec} B$ で $\mathfrak{p}' = P' \cap A$ とする. いま, $B$ は $A$ 上平坦なので, $B_{P'}$ は $A_{\mathfrak{p}'}$ 上平坦（松村 [3] 定理 7.1）. また, $(A_{\mathfrak{p}'}, \mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}'}), (B_{P'}, P'B_{P'})$ は局所環であり, $A_{\mathfrak{p}'} \subseteq B_{\mathfrak{p}} \subseteq PB_{P'}$ より, 包含写像 $f : A_{\mathfrak{p}'} \xrightarrow{\subseteq} B_{P'}$ は局所環の射なので, 「$f$ が平坦 $\Longleftrightarrow$ $f$ が忠実平坦」（松村 [3, p.58]）であることから, $B_{P'}$ は $A_{\mathfrak{p}'}$ 上忠実平坦. 故に, $\operatorname{Spec} B_{P'} \longrightarrow \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}'}$ は全射であり, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}'} \in \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}'}$ に対して, $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B_{P'}$ が存在して, $\mathfrak{P} \cap A_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}'}$（松村 [3] 定理 7.3）. そこで, $P := \mathfrak{P} \cap B$ とおけば, $P \subseteq P'$ かつ $\mathfrak{p} = P \cap A$. ■

# 4 開写像と閉写像

命題 **4.1** :

$A$ を整閉整域, $L$ を $K := \operatorname{Frac} A$ の代数拡大として, 以下は同値である.

(i) $\alpha \in L$ が $A$ 上整である.

(ii) $\alpha \in L$ の $K$ 上既約多項式 $f$ の係数が全て $A$ に入る.

**[証明].** (ii) $\Longrightarrow$ (i). $f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ とすると, $f(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. いま, $a_1, \cdots, a_n \in A$ なら, これは $\alpha$ が $A$ 上整であることに他ならない.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). $L$ の代数閉包を $\overline{L}$ とすると, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{L}$ が存在して, $f(X) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \in \overline{L}[X]$（$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ のいずれかは $\alpha$）. いま, 各 $\alpha_i$ は $\alpha$ と $K$ 上共軛. 故に, $K$ 同型 $\sigma_i : K[\alpha] \longrightarrow K[\alpha_i]$ が存在して, $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$. いま, $\alpha$ は $A$ 上整なので, $c_1, \cdots, c_n \in A$ が存在して, $\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_n = 0$. さて, $\sigma_i$ は $K$ 同型なので, $0 = \sigma_i(0) = \sigma_i(\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_n) = (\sigma_i(\alpha))^n + \sigma_i(c_1)(\sigma_i(\alpha))^{n-1} + \cdots + \sigma_i(c_n) = {\alpha_i}^n + c_1{\alpha_i}^{n-1} + \cdots + c_n$. 故に, $\alpha_i$ は $A$ 上整. いま, $f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ において, 解と係数の関係により, $a_i = (-1)^i \sum_{(k_1 < \cdots < k_i)} \alpha_{k_1} \cdots \alpha_{k_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ なので, $a_1, \cdots, a_n \in A[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$. 故に, 各 $a_i$ は $A$ 上整であるが, $a_i \in K$ で $A$ は整閉なので, $a_i \in A$. ■

命題 **4.2** :

$A$ を整閉整域, $A \subseteq B$ を整域の整拡大とし, $t \in B$ を根に持つ $A$ 係数モニック多項式のうち最低次のものを $F(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ とする. $f : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ を標準的写像として, $D(a) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid a \notin \mathfrak{p}\}$ としたとき, $f(D(t)) = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i)$ であり, $f$ は開写像である.

**[証明].** $A \subseteq B$ が整拡大なので, $t \in B$ は $A$ 上整. 故に, $K := \operatorname{Frac} A$ とすると, 命題 4.1 より, $t$ の $K$ 上既約多項式の係数は全て $A$ に入る. 故に, $F(X) \in A[X]$ は $K$ 上既約. また, 準同型定理より, $A[t] \simeq A[X]/(F(X))$. 故に, $A[t]$ は $\{1, t, \cdots, t^{n-1}\}$ を基底とする自由 $A$ 加群. さて, 0 でない自由加群は忠実平坦（松村 [3, p.62]）なので, $A[t]$ は $A$ 上忠実平坦.

<u>$f(D(t)) \subseteq \bigcup_i D(a_i)$ を示す.</u> $P \in D(t)$ を任意にとる. 即ち, $P \in \operatorname{Spec} B, t \notin P$. いま, $\mathfrak{p} := P \cap A$ とおく. さて, $a_i \notin \mathfrak{p}$ である $i$ が存在すれば, $\mathfrak{p} \in D(a_i) \subseteq \bigcup_i D(a_i)$ となり, 主張を示せたことになる. そこで, 任意の $a_i \in \mathfrak{p}$ と仮定して矛盾を導く. いま, $t$ は $F(X)$ の根なので, $F(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. 故に, $t^n = -(a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_n) \in P$. いま, $P \in \operatorname{Spec} B$ なので, $t \in P$ となり矛盾.

<u>$f(D(t)) \supseteq \bigcup_i D(a_i)$ を示す.</u> $\mathfrak{p} \in \bigcup_i D(a_i)$ を任意にとる.

<u>【Step1】</u> $t \notin \sqrt{\mathfrak{p}A[t]}$ を示す. もし, $t \in \sqrt{\mathfrak{p}A[t]}$ とすると, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $t^m \in \mathfrak{p}A[t]$. 故に, $b_1, \cdots, b_n \in \mathfrak{p}$ が存在して, $t^m = \sum_{i=1}^{n} b_i t^{n-i}$. いま, $m > n$ としてよい. ここで, $G(X) := X^m - \sum_i b_i X^{n-i} \in A[X]$ とすると, $G(t) = t^m - \sum_i b_i t^{n-i} = t^m - t^m = 0$. 故に, $G(X)$ は $t$ を根にもつ. また, $\deg G(X) = m > n = \deg F(X)$. 故に, $G(X)$ は $F(X)$ で割り切れる. いま, $(A/\mathfrak{p})[X]$ で考えると, $\overline{G}(X) = X^m - \sum_i \overline{b_i} X^{n-i} = X^m$ (何故なら, $b_i - 0 = b_i \in \mathfrak{p}$ より $\overline{b_i} = \overline{0}$) は $\overline{F}(X) = X^n + (\sum_i \overline{a_i} X^{n-i})$ で割り切れる. 即ち, $X^n + (\sum_i \overline{a_i} X^{n-i}) \mid X^m$. 即ち, $\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_n} = \overline{0}$. 即ち, 各 $\overline{a_i} \in \mathfrak{p}$. ところが, $\mathfrak{p} \in \bigcup_i D(a_i)$ ととったので, $i$ が存在して, $\mathfrak{p} \in D(a_i)$. 即ち, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, a_i \notin \mathfrak{p}$ となり矛盾.

<u>【Step2】</u> $t \notin \sqrt{\mathfrak{p}A[t]}$ より, $Q \in \operatorname{Spec} A[t]$ が存在して, $\mathfrak{p}A[t] \subseteq Q$ かつ $t \notin Q$. いま, $\mathfrak{q} := Q \cap A$ とおくと $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. さて, $A[t]$ は $A$ 上忠実平坦であったので, 定理 3.7 より, $A$ と $A[t]$ の間に下降定理が成立するので, $P_1 \in \operatorname{Spec} A[t]$ が存在して, $P_1 \subseteq Q$ かつ $\mathfrak{p} = P_1 \cap A$. いま, $B$ は $A[t]$ 上整だったので, 定理 2.4 (i) より, $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $P_1 = P \cap A[t]$. もし, $t \in P$ とすると, $t \in P \cap A[t] = P_1 \subseteq Q$ となり矛盾. 故に, $t \notin P$ となり, $P \in D(t)$.

<u>$f$ の開写像性を示す.</u> $\operatorname{Spec} B$ の任意の開集合は $D(t)$ の形の開集合の和集合として表される（松村 [3, p.31]）ので, $f : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ は開写像. ■

<u>命題 **4.3** （上昇定理と閉写像）:</u>
$A, B$ を環, $f : A \longrightarrow B$ を環準同型として, 以下は同値である.

(i) $A$ と $B$ の間に上昇定理が成立する.
(ii) ${}^a f : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ が閉写像である.

**[証明].** (i) $\Longrightarrow$ (ii). $I$ を $B$ の根基イデアルとして, ${}^a f(V(I)) = V(I \cap A)$ を示せばよい. いま, $A$ を $A/(I \cap A)$ で, $B$ を $B/I$ で置き換えて, 予め $A \longrightarrow B$ は単射で, $I = 0$ としてよい. すると, あとは ${}^a f$ の全射性を示せばよい. さて, $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ を任意にとると, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ である $A$ の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在（Reid [15] 演習問題 1.18）. いま, $A \longrightarrow B$ は単射なので, 局所化の完全性より, $A_\mathfrak{p} \longrightarrow B_\mathfrak{p}$ も単射. これと $A_\mathfrak{p} \neq \{0\}$ より, $B_\mathfrak{p} \neq \{0\}$. 故に, $Q \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$ が存在. いま, $\mathfrak{p}$ は極小素イデアルなので, $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\}$. 故に, $Q \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. さて, $P := Q \cap B \in \operatorname{Spec} B$ とする. 以上と可換図式

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \operatorname{Spec} B \arrow[d, "{}^a f"] \\ \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

より, ${}^a f(P) = P \cap A = (Q \cap B) \cap A = Q \cap A = (Q \cap A_\mathfrak{p}) \cap A = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$. 故に, 上昇定理より, $P' \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $P \subseteq P'$ かつ $\mathfrak{p}' = P' \cap A = {}^a f(P')$. 故に, ${}^a f$ は全射.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする. また, $P \in \operatorname{Spec} B$ で $\mathfrak{p} = P \cap A$ とする. いま, $\mathfrak{p} = P \cap A = {}^a f(P) \in {}^a f(V(P))$ だが, ${}^a f(V(P))$ は閉集合なので, $\mathfrak{p}' \in {}^a f(V(P))$. 即ち, $P' \in V(P) \subseteq \operatorname{Spec} B$

が存在して, $\mathfrak{p}' = {}^a f(P') = P' \cap A$. いま, $P' \in V(P)$ より $P \subseteq P'$. ■

**命題 4.4 （下降定理と開写像）:**

$A$ をネータ環, $B$ を $A$ 上有限生成代数として, 以下は同値である（Matsumura [14] 定理 8）.

(i) $A$ と $B$ の間に下降定理が成立する.

(ii) ${}^a f : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ が開写像である.

**[証明].** (i) $\Longrightarrow$ (ii). $U$ を $\operatorname{Spec} B$ の開集合とすると, Chevalley の定理（Matsumura [14] 定理 6）より, ${}^a f(U)$ は constructible. 故に, $\mathfrak{q} \in {}^a f(U)$ に対して, ${}^a f(U) \cap V(\mathfrak{q})$ は constructible. 故に, 閉集合 $F_1, \cdots, F_n$, 開集合 $U_1, \cdots, U_n$ が存在して, ${}^a f(U) \cap V(\mathfrak{q}) = \bigcup_i (F_i \cap U_i)$. いま, $F_i \subseteq V(\mathfrak{q})$ としてよい（必要なら $F_i$ を $F_i \cap V(\mathfrak{q})$ で置き換える）. もし, 任意の $i$ について $F_i \subsetneq V(\mathfrak{q})$ と仮定すると, $\mathfrak{q} \notin F_i$. 故に, $\mathfrak{q} \notin \bigcup_i (F_i \cap U_i)$ となり, $\mathfrak{q} \in {}^a f(U) \cap V(\mathfrak{q})$ に矛盾. 故に, $j$ が存在して, $F_j = V(\mathfrak{q})$. 故に, ${}^a f(U) \cap V(\mathfrak{q}) = \bigcup_i (F_i \cap U_i) \supseteq V(\mathfrak{q}) \cap U_i$. 従って, 「$\mathfrak{q} \in {}^a f(U) \Longrightarrow {}^a f(U)$ は $V(\mathfrak{q})$ の空でない開集合を含む」が成立. さて, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする. また, $P' \in U \subseteq \operatorname{Spec} B$ で $\mathfrak{p}' = P' \cap A$ とする. このとき, $\mathfrak{p}' = P' \cap A = {}^a f(P') \in {}^a f(U)$. ここで, 下降定理より, $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $P \subseteq P'$ かつ $\mathfrak{p} = P \cap A$. いま, $U$ は開集合なので, $P \in U$. 故に, $\mathfrak{p} = P \cap A = {}^a f(P) \in {}^a f(U)$. 従って, 「$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A, \mathfrak{p}' \in {}^a f(U), \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}' \Longrightarrow \mathfrak{p} \in {}^a f(U)$」が成立（即ち, ${}^a f(U)$ は generalization-closed）. 以上より, 永田の位相的判定法（松村 [3] 定理 24.2）から, ${}^a f(U)$ は開集合であり, ${}^a f$ は開写像である.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ で $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ とする. また, $P' \in \operatorname{Spec} B$ で $\mathfrak{p}' = P' \cap A$ とする. いま, $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B \simeq V(\mathfrak{p}B), \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p} \simeq V(\mathfrak{p})$（松村 [3] 問題 4.4）なので, 可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Spec} B & \xrightarrow{\supseteq} & \operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B & = & V(\mathfrak{p}B) \\
\downarrow {}^a f & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
\operatorname{Spec} A & \xrightarrow{\supseteq} & \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p} & = & V(\mathfrak{p})
\end{array}$$

において, $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B$ は $\operatorname{Spec} B$ の部分空間, $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ は $\operatorname{Spec} A$ の部分空間と見做せる. いま, 「$\mathfrak{p}B \subseteq P' \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq P' \cap A$」なので, $V(\mathfrak{p}B) = ({}^a f)^{-1}(V(\mathfrak{p}))$. いま, $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B$ の任意の開集合 $\mathfrak{U}$ をとると, $U \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $\mathfrak{U} = U \cap V(\mathfrak{p}B)$. 故に, ${}^a f(\mathfrak{U}) = {}^a f(U \cap V(\mathfrak{p}B)) = {}^a f(U \cap ({}^a f)^{-1}(V(\mathfrak{p}))) \subseteq {}^a f(U) \cap V(\mathfrak{p})$. いま, ${}^a f$ は開写像なので, ${}^a f(U) \in \operatorname{Spec} A$ は開集合. 故に, ${}^a f(U) \cap V(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ は開集合. 故に, ${}^a f(\mathfrak{U}) \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ は開集合. 従って, $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}B \longrightarrow \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ は開写像. 故に, 予め $A$ は整域で $\mathfrak{p} = 0$ としてよい. さて, $P \subseteq P'$ である $B$ の極小素イデアル $P$ が存在（Reid [15] 演習問題 1.18）. そして, $B$ の極小素イデアル全体を $\{P, P_1, \cdots, P_r\}$ として, $W := \operatorname{Spec} B \backslash (\bigcup_{i=1}^r V(P_i))$ とする. いま, $P \notin \bigcup_{i=1}^r V(P_i)$ より $P \in W$ なので, $W$ は $\operatorname{Spec} B$ の空でない開集合. いま, ${}^a f$ は開写像なので, ${}^a f(W)$ は $\operatorname{Spec} A$ の空でない開集合であり, $\operatorname{Spec} A$ の生成点 $\mathfrak{p} = 0$ を含む. 故に, $Q \in W$ が存在して, ${}^a f(Q) = 0$. いま, $Q$ に含まれる $B$ の極小素イデアルが存在する（Reid [15] 演習問題 1.18）が, それは $W$ の定義より, $P$ に限る. 故に, $P \cap A = {}^a f(P) = 0 = \mathfrak{p}$. ■

**事実 4.5 :**

以下が成り立つ.

(i) $\varphi : X \longrightarrow Y$ がスキームの準コンパクト射で, $F \subseteq X$ が閉集合としたとき, $\varphi(F)$ が specialization-closed ならば, $\varphi(F)$ は閉集合である（Hartshorne [12] II. 補題 4.5）.

(ii) $\varphi : X \longrightarrow Y$ がネータスキームの有限型射で, $F \subseteq X$ が開集合としたとき, $\varphi$ が平坦ならば, $\varphi(F)$ は開集合である.

## 参考文献


[1] 後藤四郎,『可換環論の勘どころ』共立出版, 2017.

[2] 後藤四郎・渡辺敬一,『可換環論』日本評論社, 2011.

[3] 松村英之,『復刊可換環論』共立出版, 2000.

[4] 森田康夫,『代数概論』裳華房, 第 12 版, 2003.

[5] 森田康夫,『整数論』東京大学出版会, 1999.

[6] 成田正雄,『復刊イデアル論入門』共立出版, 2009.

[7] 新妻弘,『可換環論の様相 クルルの定理と正則局所環』近代科学社, 2017.

[8] 雪江明彦,『代数学 2 環と体とガロア理論』日本評論社, 2010.

[9] 雪江明彦,『代数学 3 代数学のひろがり』日本評論社, 2011.

[10] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald（新妻弘訳）,『可換代数入門』共立出版, 2006.

[11] D. Eisenbud, *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, 1995.

[12] R. Hartshorne（高橋宣能訳）,『代数幾何学 1』丸善出版, 2012

[13] D. G. Northcott（新妻弘訳）,『イデアル論入門』共立出版, 2007.

[14] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Addison Wesley Longman, 1970.

[15] M. Reid（伊藤由佳理訳）,『可換環論入門』岩波書店, 2000.